Title	積分表示と近似問題 (Function Algebra)
Author(s)	阪井, 章
Citation	数理解析研究所講究録 (1972), 143: 107-121
Issue Date	1972-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/106704
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
143巻 1972年 107-121

積分表示と近似問題

阪大 教養　阪井 章

§1. はじめに —— $\mathbb{C}^1$の場合

複素平面$\mathbb{C}^1$上のコムパクトな台をもつ複素測度μに対して

$$(1) \qquad \tilde{\mu}(z) = \int \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}$$

を考える. $\int |\zeta - z|^{-1} d|\mu|(\zeta)$は局所可積分であるから$\tilde{\mu}(z)$は殆んど到る処有限で, μの台の外では正則である.

Kを$\mathbb{C}^1$のコムパクト集合とし, R(K)をK上に極をもたない有理関数によってK上一様近似される関数の全体とする.

次の2つの補題はR(K)の関数解析的研究に重要な役割を果す.

<u>補題1</u> $\tilde{\mu}(z) = 0$ a.e. $\Rightarrow \mu = 0$.

<u>補題2</u> $\mu \perp R(K) \Longleftrightarrow \tilde{\mu}(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus K$.

例えば, Lavrentieffの定理:

$$P(K) = C(K) \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathbb{C} \setminus K \text{ が連結} \\ \mathrm{int}(K) = \phi \end{cases}$$

の簡単な証明が得られる. ([1]). また

定理 1 (Bishop の peak point theorem [2]) K の殆んどすべての点が R(K) の peak point ならば R(K) = C(K).

(K の点 z が R(K) の peak point であるとは

$$f(z) = 1 > |f(z')| \quad \forall z' \in K,\ z' \neq z$$

となる $f \in R(K)$ が存在することである.)

補題 3 $\{U_j\}$ を K の有限開被覆とするとき, $\mu \perp R(K)$ に対し U_j 内に台をもつ $\mu_j \perp R(K)$ があって $\mu = \sum \mu_j$.

および, これから導かれる

定理 2 (Bishop [3]) —局所化定理— $f \in C(K)$ とする. K の各点 z に対して, 近傍 U_z があって $f|(\bar{U}_z \cap K) \in R(\bar{U}_z \cap K)$ ならば $f \in R(K)$.

などが補題 1, 2 から証明される. (定理 2 の簡単な証明は [4]).

定理 2 は次の Mergelyan の定理 [5] の簡単な証明を与える.

定理 3 $\mathbb{C} \setminus K$ の成分の直径がある正数より小さくなければ (特に, $\mathbb{C} \setminus K$ の成分が有限個ならば) R(K) = A(K).

こゝで A(K) は K 上で連続で K の内部で正則な関数全体.

補題 1, 2 の証明は, それぞれ, 次の 2 つの Cauchy 核の性質から導かれる.

(I) 開集合 G 内にコムパクトな台をもつ C^1-関数 f に対し

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{f_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \qquad z \in G.$$

(II) $(\zeta - z)^{-1}$ は z 以外で ζ について正則. 有限個の滑らかな閉曲線で囲まれた領域 G と $\bar{G}$ で正則な関数 f に対し

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \qquad z \in G.$$

§2. 開いたリーマン面の場合

X を開いたリーマン面, K をそのコンパクト部分集合とする. K の近傍で正則な関数によって K 上一様近似される関数の全体を $H(K)$ とする。 $X = \mathbb{C}^1$ のときは $H(K) = R(K)$ である. (Runge の定理). $H(K)$ に対する peak point および $A(K)$ は §1 と同様に定義する。

(I), (II) に相当する性質をもつ核として, こゝでは Behnke-Stein の核 ([6]) を用いる. $p, q \in X$ に対し $\omega(p, q)$ は次の性質をもつ: $\omega(p,q)$ は p について, $p = q$ でのみ留数 $2\pi i$ の1位の極をもつ有理型微分で, $\omega(p,q) = k(z,q)dz$ と書くことにすれば, 点 p とその近くでの局所座標 z を固定すれば, $k(z,q)$ は q について, $q = p$ でのみ極をもつ X 上の有理型関数である. $f \in C^1(\bar{G})$ に対して $\bar{\partial} f = f_{\bar{z}} d\bar{z}$ とすれば

$$f(q) = \int_{\partial G} f(p)\,\omega(p,q) - \int_G \bar{\partial} f(p) \wedge \omega(p,q)$$

が成り立つから性質(I), (II)をもっている.

X上の$(1,0)$-形式 $g(z)dz$ が各局所座標近傍VとVにおける局所座標zに対して $\int_V |g(z)|\cdot|dz\wedge d\bar{z}|<\infty$ をみたすとき，$g(z)dz$ はクラス$\mathcal{L}^1$に属するということにする．

X上のコムパクトな台をもつ測度μに対して，(1)の代りに

$$(2)\qquad T\mu(p)=\int\omega(p,q)\,d\mu(q)$$

を考える．$T\mu$ はX上のクラス$\mathcal{L}^1$の微分形式である．補題1，2に対応して次の補題が得られる．

<u>補題1′</u> $T\mu(p)=0$ a.e. on X $\Rightarrow$ $\mu=0$．

<u>補題2′</u> $\mu\perp H(K)\Leftrightarrow T\mu(p)=0\quad\forall p\in X\setminus K$．

hをX上のコムパクトな台をもつC^1級関数とするとき，X上の連続関数fについて $f\longrightarrow\int fh\,d\mu$ なる線形汎関数によって定まる測度を$h\mu$で示すことにする．$T\mu\in\mathcal{L}^1$より

$$(3)\qquad T(h\mu)(p)=\int h(q)\,\omega(p,q)\,d\mu(q)\qquad\text{a.e. on }X.$$

<u>補題3′</u> $\{U_j\}$ は局所座標近傍によるKの有限被覆とする．
$\mu\perp H(K)$に対し，各U_j内に台をもつ測度 $\mu_j\perp H(K)$ があって $\mu=\sum\mu_j$．

(証明) $\{U_j\}$に対する1の分解を$\{h_j\}$とし，$d\nu_j=\bar{\partial}h_j\wedge T\mu$ によって定まる測度をν_jとする．$\omega(p,q)$の特異点の様子から，h_jに対して(3)をみたす点pに対して $T\nu_j(p)=T(h_j\mu)(p)-h_jT\mu(p)$．
$\mu_j=h_j\mu-\nu_j$ とおいて補題1′，2′を用いる．

これから次の定理が得られる.

<u>定理2′</u>　$f \in C(K)$ とする. K の任意の点 p に対して近傍 U_p が $f|(\bar{U}_p \cap K) \in H(\bar{U}_p \cap K)$ となるように選べるならば $f \in H(K)$.

<u>定理3′</u>　ρ を X のある計量とする. $X \setminus K$ のすべての成分がある正数より小くない ρ-直径をもつなら(特に $X \setminus K$ が相対的コムパクトな成分をもたないとき) $H(K) = A(K)$.

<u>系</u>　X 上正則な関数によって K 上一様近似される関数の全体を $H(K, X)$ とする. $X \setminus K$ が相対的コムパクトな成分をもたないときは　$H(K, X) = A(K)$.

この系は Behnke-Stein の定理:

$X \setminus K$ が相対的コムパクトな成分をもたないときは $H(K, X) = H(K)$.

と定理3′とから出る. また

<u>定理1′</u>　K の殆んどすべての点が $H(K)$ の peak point ならば　$H(K) = C(K)$.

の証明は, 定理2′によって定理1に帰着される. これはまた補題1′, 2′から直接証明することも出来る.

定理1′, 2′は[7]. 定理2′を補題1′~3′より証明することおよび定理2′の別証(後述)については[8].

§3. $\mathbb{C}^n$ における積分表示

$\mathbb{C}^n$ $(n>1)$ においては性質 (I), (II) を同時にみたす核は存在しない。正則性を除けば Martinelli-Bochner の核 ([9]) は (I) (II) を充たしている。これから補題 1 の 1 つの拡張が得られる。また、この表示と、後述の Hefer の定理とから導かれる Weil の積分表示 (Weil 領域の場合) が知られている。ここでは強擬凸領域に対する Henkin の核 ([10]) について述べる。

$\mathbb{C}^n$ のある領域で定義された C^1-級ベクトル値関数 $\eta(z)=(\eta_1(z),\cdots,\eta_n(z))$, $z=(z_1,\cdots,z_n)$ に対して

$$\omega(\eta)=d\eta_1\wedge d\eta_2\wedge\cdots\wedge d\eta_n$$

$$\omega'(\eta)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\eta_k\, d\eta_1\wedge\cdots\wedge d\eta_{k-1}\wedge d\eta_{k+1}\wedge\cdots\wedge d\eta_n.$$

とおく。α が C^1-関数, $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ が C^1-ベクトル値関数ならば $\omega'(\beta/\alpha)=\alpha^{-n}\omega'(\beta)$.

Cauchy-Fantappié の公式

G は $\mathbb{C}^n$ の有界領域で, ∂G は区分的に滑らかな面から成るとし, $\partial G\times G$ 上の C^1-級ベクトル値関数 $w(\zeta,z)$ が

$$\sum_{j=1}^{n} w_j(\zeta,z)(\zeta_j-z_j)=1\ ,\quad \zeta\in\partial G\ ,\ z\in G$$

をみたしているとする。$f\in A(\bar{G})$ に対して

$$f(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial G} f(\zeta)\,\omega'(w(\zeta,z))\wedge\omega(\zeta),\quad z\in G$$

$w_j(\zeta, z) = \bar{\zeta}_j / |\zeta - z|^2$ のときは，これは Martinelli - Bochner の公式に他ならない。一般の場合は，$\mathbb{C}^{2n}$ における多様体 M：$\sum_{k=1}^{n} w_k(\zeta_k - z_k) = 1$ を考えると，$\gamma = f(\zeta)\cdot\omega'(w)\wedge\omega(\zeta)$ は M 上の閉形式で，$\Gamma_0 = \{(\zeta, w(\zeta, z)) \in \mathbb{C}^{2n},\ \zeta \in \partial G\}$ は M 上で $\Gamma_1 = \{(\zeta, (\bar{\zeta} - \bar{z})|\zeta - z|^{-2}) \in \mathbb{C}^{2n},\ \zeta \in \partial G\}$ とホモトープであるから，Stokes の定理により，Martinelli - Bochner の公式に帰着するのである.

例えば $\mathbb{C}^n$ の超球 B : $|z|^2 = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 < 1$ を考える．このときは $w_j(\zeta, z) = \bar{\zeta}_j (1 - \sum_{k=1}^{n} \bar{\zeta}_k z_k)^{-1}$ が上の条件をみたすから，$f \in A(\bar{B})$ に対して

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial B} f(\zeta) \frac{\omega'(\bar{\zeta}) \wedge \omega(\zeta)}{(1 - \sum_{k=1}^{n} \bar{\zeta}_k z_k)^n}, \quad z \in B$$

この時，核は $\zeta \in \partial B$ に対して z について B で正則である.

以下，強擬凸領域とは $\mathbb{C}^n$ の有界領域 D で C^3 級の境界をもち，$\bar{D}$ のある近傍で C^3 級の関数 ρ で ∂D の近傍で強多重劣調和，∂D 上で $\mathrm{grad}\,\rho \neq 0$ であるものによって，$D = \{z ; \rho(z) < 0\}$ と表わされるものを指すことにする.

<u>定理 4</u>（Henkin [10]）D が強擬凸領域のとき，次の性質をもつ正数 δ と $\Phi(\zeta, z)$ が存在する.

(i) $\zeta \in \partial D$ に対して，$\Phi(\zeta, z)$ は z について $D_\delta = \{\rho < \delta\}$ において正則で，$\bar{D} \setminus \{\zeta\}$ で $\Phi(\zeta, z) \neq 0$。

(ii) $z \in D_\delta$ のとき，$\Phi(\zeta, z)$ は ζ について ∂D 上 C^1 級．

(iii) $\zeta \in \partial D$ のとき，z について D_δ で正則，$z \in D_\delta$ のとき ζ について ∂D 上 C^1 級の関数 $P_k(\zeta, z)$ $k=1 \cdots n$ があって $\Phi(\zeta, z) = \sum_{k=1}^n P_k(\zeta, z)(\zeta_k - z_k)$．

(iv) $f \in A(\bar{D})$ に対して

$$(5) \qquad f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D} f(\zeta) \frac{\omega'(P(\zeta, z)) \wedge \omega(\zeta)}{\Phi(\zeta, z)^n}.$$

$\Phi(\zeta, z)$ は $\rho(z)$ から Hörmander の $\bar{\partial}$-問題の L^2 解を利用して構成される．(iii) は次の

Hefer の定理　D が正則領域，f が D で正則ならば，$D \times D$ で正則な関数 $p_k(\zeta, z)$, $k=1 \cdots n$，があって

$$f(\zeta) - f(z) = \sum_{k=1}^n p_k(\zeta, z) \cdot (\zeta_k - z_k).$$

による．(iv) は Cauchy-Fantappiè の公式よりある．この核も $\zeta \in \partial D$ のとき z について D で正則である．(Ramirez [11] もこれと同等のものを得ているが構成法は異なる)．

μ を K 上の測度，G は K を含む強擬凸領域とし，定理4における G に対応する関数を Φ_G，P_G とする．∂G 上の $(n, n-1)$ 形式

$$T_G \mu(\zeta) = \int \frac{\omega'(P_G(\zeta, z)) \wedge \omega(\zeta)}{\Phi_G(\zeta, z)^n} d\mu(z).$$

を考える．補題2の拡張の1つの形として．

補題2″　Kは正則領域の共通部分とする.

[Kを含む任意の強擬凸領域 G と ∂G 上の任意の点 ζ に対して $T_G\mu(\zeta)=0$] $\Longleftrightarrow$ $\mu\perp H(K)$.

これを用いる方法は今のところ成功していないので定理2について，別の方法を次に述べる.

§4. $\bar\partial$-問題の有界な解と局所化定理

X を n 次元複素多様体，K をそのコムパクト集合とし，$H(K)$ $A(K)$ の定義は §2 と同様とする. 座標近傍 V_j, $j=1\cdots N$ による K の被覆と，V_j の局所座標 $z^{(j)}=(z_1^{(j)},\cdots z_n^{(j)})$ に対し，$\{(V_j,z^{(j)})\}_{j=1}^N$ を $\mathfrak{A}$ で表わす. K を含む開集合 G で定義された C^∞ 級 $(0,1)$ 形式 α は各 $V_j\cap G$ において

$$\alpha=\sum_{k=1}^n a_k^{(j)}(z^{(j)})\,d\bar z_k^{(j)}$$

と書ける. G の部分集合 S に対して，α のノルムを定義する.

$$\|\alpha\|_{S,\mathfrak{A}}=\sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^n\sup_{S\cap V_j}|a_k^{(j)}(z^{(j)})|$$

定義　X のコムパクト集合がクラス (δ) に属するとは，次の条件をみたす開集合の列 $\{D_m\}$ がとれることである.

(i) $D_m\supset\bar D_{m+1}$，$\bigcap_{m=1}^\infty D_m=K$.

(ii) 任意の $\mathfrak{A}=\{(V_j,z^{(j)})\}_{j=1}^N$ に対し，次の性質をみたす定数 C が存在する: $D_m\subset\bigcup_{j=1}^N V_j$ のとき，$C^\infty(\bar D_m)$ の $(0,1)$ 形式 α で $\bar\partial\alpha=0$ をみたすものに対して，$C^\infty(D_m)$ の関数 u が

あって，$\bar{\partial}u=\alpha$ かつ $\sup_{D_m}|u| \leq C\ \|\alpha\|_{D_m,\mathfrak{C}}$.

<u>定理5</u>（局所化定理）. Kがクラス（δ）のコムパクト集合のとき，Kの各点 p に対して $f|(\bar{U}_p\cap K) \in H(\bar{U}_p\cap K)$ をみたす近傍 U_p が選べるなら，$f\in H(K)$.

（証明）$\mathfrak{C}=\{(V_j, z^{(j)})\}$ を固定し，$\{V_j\}$ に対する単位の分解を $\{\varphi_j\}$ とし，$C_1=\sum_{j=1}^{N}\|\bar{\partial}\varphi_j\|_{(U_j V_j),\mathfrak{C}}$ とおく．任意の $\varepsilon>0$ に対して開集合 $\Omega_j\supset\bar{U}_j\cap K$ と Ω_j で正則な f_j があって $|f_j-f|<\varepsilon$．（$\bar{U}_j\cap K$）．$\Omega_j\cap\Omega_k$ で $h_{jk}=\varphi_j(f_j-f_k)$ とし，$h_k=\sum_{j=1}^{N}h_{jk}$ とおくと各 Ω_k で $-\bar{\partial}h_k$ に一致する（0，1）形式 $\alpha\in C^\infty(\bigcup_{j=1}^{N}\Omega_j)$ ができる．開集合Gを十分Kに近くとれば $\|\alpha\|_{G,\mathfrak{C}}<3C_1\cdot\varepsilon$．Kがクラス（$\delta$）に属するから $u\in C^\infty(G)$ があって $\bar{\partial}u=\alpha$ かつ $\|u\|_G<3C_1\cdot C\cdot\varepsilon$ としてよい．各 $\Omega_j\cap G$ で $F=h_j+u+f_j$ とおけばFはG全体で正則な関数で $|F-f|<3(1+C_1\cdot C)\varepsilon$ だから $f\in H(K)$.

次にクラス（δ）の集合の例を述べる．

Xが開いたリーマン面の場合には $\bar{\partial}$-問題の解をBehnke-Steinの核で表示することにより，すべてのコムパクト集合がクラス（δ）に属することが知られる．このことは定理2′の別証明を与えたことになる．（[8]）．

$\mathbb{C}^n$（$n>1$）の場合は $\bar{\partial}$-問題の L^2-解については領域が正則のときは $\|u\|_{L^2(G)}\leq 2d(G)\ \|\alpha\|_{L^2(G)}$（$d(G)$ はGの直径）の形で得られる．しかし L^∞ ノルムについては簡単ではない．

強擬凸領域についての$\bar\partial$問題の解は次の定理で与えられる。

定理6（Henkin [13]）Dは$\mathbb{C}^n$の強擬凸領域，αは$C^\infty(\bar D)$の$(0,1)$形式で$\bar\partial\alpha=0$をみたすとする。$\bar\partial u=\alpha$かつ

(6) $$\|u\|_D \leq \gamma(D)\,\|\alpha\|_D$$

をみたす関数$u\in C^\infty(D)$が存在する。このuは

(7) $$u(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\left\{\int_{\partial D\times[0,1]}\langle\alpha, d\bar\zeta\rangle\wedge\omega'(\eta)\wedge\omega(\zeta)\right.$$
$$\left.-\int_D\frac{\langle\alpha,(\bar\zeta-\bar z)\rangle}{|\zeta-z|^2}\,\omega(\bar\zeta)\wedge\omega(\zeta)\right\},$$

で与えられる。こゝにηは$0\leq\lambda\leq 1$に対し，

$$\eta_k=\lambda(\bar\zeta_k-\bar z_k)|\zeta-z|^{-2}+(1-\lambda)P_k(\zeta,z)\Phi(\zeta,z)^{-1}.$$

(7)式はMartinelli-Bochnerの公式と定理4とからStokesの定理を用いて得られ，右辺を評価して(6)を得る。$\gamma(D)$はDの直径の他，Dを定義する関数$\rho(z)$の2階微分係数に依存している。（Ramirezの核を用いて得られる同等な結果は[14]）。

コムパクト集合Kに対して，Kを含む開集合の列$\{D_m\}$がD_mが強擬凸領域の有限個の和集合で，定理6の中の$\gamma(D_m)$が有界であるように選べるなら，Kはクラス(δ)に属する。したがって，∂Kの近傍で強多重劣調和な関数$\rho_0(z)$があって，D_mが$\{\rho_0<\frac{1}{m}\}$で表わされるなら，Kはクラス(δ)に属する。

例えば，$K=\bar D$（D:強擬凸領域）のときはρ_0としてDを定義する関数をとればよいから，Kはクラス(δ)に属する。

また，MがC^∞級の有限またはコムパクトなtotal realな部分多様体であるときは，$\rho_0(z) = dist.(z, M)^2$とおくと，$\rho_0$はMの近傍で強多重劣調和で$M = \{\rho_0 = 0\}$である（[15]）．したがって，Mはクラス(δ)に属する．

§5. 強擬凸領域の近似定理

まず$\mathbb{C}^n$の有界な凸領域Dを考える．Dの1点z_0をとり，$f \in A(\bar{D})$に対して$f_\lambda(z) = f(z_0 + \lambda(z - z_0))$とおくと，$\lambda < 1$に対して$f_\lambda \in H(\bar{D})$．$\lambda \to 1$のとき$\bar{D}$上一様に$f_\lambda \to f$であるから$A(\bar{D}) = H(\bar{D})$．一般に

<u>定理7</u>（Henkin [16], Lieb [12]）$\mathbb{C}^n$の強擬凸領域Dに対して$A(\bar{D}) = H(\bar{D})$．

Liebの証明は∂Dの境界上の各点に対し，その近傍Uを選んで$U \cap D$がある凸領域と正則同値である（例えばHenkin - Mitjagin [17]）ことを用い，定理5と同様な方法で$A(\bar{D}) = H(\bar{D})$を示す．

Henkinの証明は定理4の応用として得られる次の定理を利用する．

<u>定理8</u>（[10]）Dは強擬凸領域とする．任意の$\delta > 0$に対して直径がδより小さい部分S_iに∂Dを分割し，$f \in A(\bar{D})$を$g_j \in A(\bar{D}) \cap H(\bar{D} \setminus S_j)$ $j = 1 \cdots N(\delta)$によって$f = \sum_{j=1}^{N(\delta)} g_j$と分解することが出来る．

$\delta>0$ を十分小さくとり，S_j の1点 ζ_j に対して行列 $A(\zeta_j)$ を $\varepsilon>0$ が十分小で $z\in S_j$ なら $z-\varepsilon A(\zeta_j)z\in D$ が成り立つように選ぶことが出来る．$g_{j,\varepsilon}(z)=g_j(z-\varepsilon A(\zeta_j)z)$ とおけば $g_{j,\varepsilon}\in H(\bar{D})$ で $g_{j,\varepsilon}\to g_j$ $(\varepsilon\to 0,\ \bar{D}$ 上一様$)$．$f_\varepsilon=\sum_j g_{j,\varepsilon}$ とおけば $f_\varepsilon\in H(\bar{D})$ で $\bar{D}$ 上一様に $f_\varepsilon\to f$．したがって $A(\bar{D})=H(\bar{D})$．（Henkinはこの方法で強擬凸領域に対しては Hefer の定理が $A(\bar{D})$ について成立することを示している．）

なお，Henkin [18] は $\mathbb{C}^n$ の Weil 領域に対しても定理6が成立することを主張している．また Kerzman [19] では定理6が Stein 多様体の強擬凸領域について成立することが示されている．

引用文献

[1] Wermer J.: Banach Algebras and Analytic Functions, Advances in Math., Academic Press 1961.

[2] Bishop E.: A minimal boundary for function algebras, P. J. M. (1959), 629 — 642.

[3] Bishop E.: Subalgebras of functions on a Riemann surfaces, P. J. M. 8 (1958), 29 — 50

[4] Garnett J.: On a theorem of Mergelyan, P. J. M. 26 (1968) 461 — 467.

[5] Mergelyan S. N: Uniform approximation to functions of a complex variable, A M S Transl. Ser I vol 3 281 — 286.

[6] Behnke-Stein K : Entwicklungen analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen, Math. Ann. 120 (1948) 430 — 461.

[7] Kodama L : Boundary measures of analytic differentials and uniform approximation on a Riemann surface, P. J. M. 15 (1965) 1261 — 1267.

[8] Sakai A : Localization theorem for holomorphic approximation on open Riemann surfaces (to appear)

[9] Bochner S.: Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula, Ann. Math. 44 No 4 (1943) 652 — 673.

[10] Henkin G. M. : Integral representations of functions holomorphic in strictly pseudo-convex domains and some applications, Eng. Transl. Math. of the USSR 1969, 7 (4) 597 — 616.

[11] Ramirez de A. E. : Ein Divisionsproblem in der komplexen Analysis mit einer Anwendung auf Randintegraldarstellungen, Math. Ann. 184 (1970) 172 — 187.

[12] Lieb I. : Ein Approximationssatz auf streng pseudokonvex Gebieten, Math. Ann. 184 (1969) 56 — 60.

[13] Henkin G. : Integral representations of functions in strongly pseudoconvex regions, and applications to the $\bar{\partial}$-problem. Mat. Sbornik, vol 82 (124) 2 (6) (1970) 300 — 308 (Russian)

[14] Lieb - Grauert : Das Ramirezsche Integral und die Lösung der Gleichung $\bar{\partial} f = \alpha$ im Bereich der beschränkten Formen, Rice Univ. Stud. vol 56, No. 2 (1970) 29 — 50

[15] Nirenberg R - Wells R.O. : Approximation theorems on differentiable submanifolds of a complex manifold, Trans A.M.S. 142 (1969) 15 — 35

[16] Henkin G : Approximation of functions in pseudoconvex domains and the theorem of Z. L. Leibenson, Pol. Acad. Nauk. Ser. Mat. XIX No. 1 (1971) 37 — 42 (Russian)

[17] Henkin G. - Mityagin : Linear problem of complex analysis Uspehi XXVI 4 (160) (1971) 93 — 152 (Russian)

[18] Henkin G : Uniform estimates for solutions of the $\bar{\partial}$-problem in a Weil domain, Uspehi XXVI 3 (150) (1971) 211 — 212 (Russian)

[19] Kerzman N : Hölder and L^p-estimates for solutions of $\bar{\partial} u = f$ in strongly pseudoconvex domains, Comm. pure and appl. math. vol XXIV (1971) 301 — 379.